UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
DEPATAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária

Prova do Processo Seletivo para Mestrado 2016-2

GABARITO

Nº de inscrição do candidato: _______________

- Utilizar APENAS o número de inscrição para identificar a sua prova;
- A interpretação das questões é parte da avaliação;
- Indique todos os cálculos organizadamente;
- São DEZ (10) questões, valendo UM (1) ponto cada, totalizando 10 pontos;
- O tempo máximo para a realização desta prova é de 4 horas;
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta (azul ou preta) e é permitido utilizar somente a calculadora.
- BOA SORTE !!

1. Verifique se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}, & \text{se } x \neq -1 \\ 3 \qquad\quad, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

é contínua para o número -1. Justifique sua resposta.

Solução: **(1,0 ponto)**

Para $x \neq -1$, temos

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+1} = \frac{(2x+1)(x+1)}{x+1} = 2x+1\,.$$

Embora exista o limite de $f(x)$ para $x \neq -1$, isto é,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(2x+1) = -1,$$

a função não é contínua em $x = -1$ pois,

$$\lim_{x\to -1} f(x) \neq f(-1) = 3\,.$$

2. Determine o ponto onde a reta normal a $f(x) = \frac{2}{x}$, no ponto (1,2), corta o eixo x.

Solução:

A reta normal ao gráfico de f no ponto (x, y) é definida como sendo a linha reta através de (x, y) que é perpendicular à reta tangente em (x, y).

Se $f'(x)$ é o coeficiente angular da tangente ao gráfico de f em (x_1, y_1) tem-se que $-\frac{1}{f'(x_1)}$ é o coeficiente angular da normal em (x_1, y_1). Assim,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow \text{o coeficiente angular da normal é } -\frac{1}{-2/x^2} = \frac{x^2}{2} \text{ e,}$$

para $x_1 = 1$ tem-se $\frac{1}{2}$.

Portanto, tem-se a equação da reta normal $y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Obteve a reta normal (0,5 pontos)

A reta normal corta o eixo x em $y = \frac{3}{2}$. **(0,5 pontos)**

3. Calcule a integral $\int_0^2 x^2 e^{2x}\, dx$.

Solução:

Fazendo $t = 2x$, os limites de integração ficam $t = 0$ e $t = 4$, sendo

$$dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}.$$

Assim,

$$\int_0^2 x^2 e^{2x}\, dx = \int_0^4 \left(\frac{t}{2}\right)^2 e^t \,\frac{dt}{2} = \frac{1}{8}\int_0^4 t^2 e^t dt\,.$$

Resolvendo $\int_0^4 t^2 e^t dt$ por partes, tem-se

$$t^2 = u\,; \quad e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad du = 2tdt; \quad v = e^t$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 t^2 e^t dt &= uv\,|_0^4 - \int_0^4 v\, dv \\ &= t^2 e^t\,|_0^4 - \int_0^4 2t\, e^t\, dt \\ &= 16e^4 - 2[te^t\,|_0^4 - e^t|_0^4] \\ &= 16e^4 - 2[4e^4 - (e^4 - 1)] \\ &= 16e^2 - 6e^2 - 2 \\ &= 10e^2 - 2\ .\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^2 x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{8}(10e^2 - 2) = 8{,}9863\ .\ \textbf{(1,0 ponto)}$$

4. Uma variável aleatória X segue uma distribuição binomial com parâmetros n = 10 e p=1/4. Determinar a média e a variância da distribuição de X.

Solução:

$$\mu_X = np = 10\times\frac{1}{4} = 2{,}5$$

(0,5 pontos)

$$\sigma_X^2 = np(1-p) = 10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = 1{,}875$$

(0,5 pontos)

5. Se X é uma variável aleatória binomial com n =4 e p =0,5, calcular as seguintes probabilidades:
   a) P(X=0)
   b) P(X>0)

Solução:

a) $P(X=0)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4\cong 0{,}0625=6{,}25\%$ **(0,5 pontos)**

b) $P(X>0)=1-P(X=0)\cong 1-0{,}0625=0{,}9375=93{,}75\%$ **(0,5 pontos)**

6. Se uma população é considerada homogênea, qual é o plano de amostragem que é recomendado para obter uma amostra aleatória de tamanho n dessa população?

Solução: Amostragem simples ao acaso ou amostragem sistemática. **(1,0 ponto)**

7. Supondo que uma pessoa sem diabetes possui média de glicose no sangue de 90 mg/dl de açúcar no sangue, em jejum, um paciente foi testado em um ensaio clínico realizando-se uma amostra de n=10 dias consecutivos. Essa amostra desse indivíduo apresentou média amostral nas 10 unidades amostrais de 98 mg/dl e variância de 100 mg^2/dl. Testar a hipótese: $H_0:\mu=90$ versus $H_1:\mu>90$, usando um coeficiente de confiança de 95%. Tire as conclusões de interesse sobre a possibilidade ou não do indivíduo ser diabético. **Observação:** em geral se faz apenas um exame por indivíduo e conclui se o mesmo é ou não diabético, se o valor observado está acima de um limite preconizado. Nesse caso sugere-se uma decisão baseada em um teste de hipótese, o que potencialmente leva a diferente critério de decisão.

   DADO: quantil superior 5% da distribuição t com 9 graus de liberdade, $t_{0,05;\nu=9}$=1,833.

Solução:

   a) $H_0:\mu=90$ versus $H_1:\mu>90$, **(0,05 pontos)**
   b) α = 0,05 **(0,05 pontos)**

c) Valor da estatística:

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{98 - 90}{\frac{10}{\sqrt{10}}} = 2,530$$ **(0,40 pontos)**

d) Como $t_{0,05;\nu=9}$=1,833 e t_c=2,530> $t_{0,05;\nu=9}$=1,833, então concluímos que o valor da estatística está na região de rejeição da hipótese nula e, portanto, devemos rejeitar a hipótese de que o indivíduo é normal e concluímos que sua média de glicose está acima do normal, sugerindo, com 95% de confiança que ele é diabético. **(0,50 pontos)**

8. Num experimento utilizando o delineamento em blocos casualizados (DBC) com 4 repetições, foram obtidos os dados a seguir:

Tratamento	Blocos 1	2	3	4	Total
1	142,36	144,78	145,19	138,88	571,21
2	139,28	137,77	144,44	130,61	552,10
3	140,73	134,06	136,07	144,11	554,97
4	150,88	135,83	136,97	136,36	560,04
5	153,49	165,02	151,75	150,22	620,48
Total	726,74	717,46	714,42	700,18	2858,80

Para o nível de 5% de significância, pede-se:

a) Fazer a análise de variância para este experimento, concluindo corretamente.

b) Aplicar o teste Scheffé ao contraste $C_1 = m_1 + m_2 - 2m_5$, concluindo corretamente.

<u>DADOS</u>: SQTotal = 1273,9522; SQBlocos = 72,6976;

$F_{(5\%;\ 3,\ 15)}$ = 3,29; $F_{(5\%;\ 4,\ 15)}$ = 3,06; $F_{(5\%;\ 5,\ 15)}$ = 2,90;

$F_{(5\%;\ 3,\ 12)}$ = 3,49; $F_{(5\%;\ 4,\ 12)}$ = 3,26; $F_{(5\%;\ 5,\ 12)}$ = 3,11;

$$DMS = S = \sqrt{(I-1)F_\alpha \frac{QMErro}{r} \sum_{i=1}^{I} c_i^2}\ .$$

Solução:

a) **(0,60 pontos)**

$$\begin{cases} H_0 : m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m \\ H_1 : \text{não } H_0 \end{cases}$$

Tabela 1 - Análise de variância

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab;\alpha}$
Tratamentos	4	794,9298	198,7325	5,869	3,26
Blocos	3	72,6976	-		
Resíduo (erro)	12	406,3248	33,8604		
Total	19	1273,9522			

$$SQTrat = \frac{1}{4}(571{,}21^2 + 552{,}10^2 + 554{,}97^2 + 560{,}04^2 + 620{,}48^2) - \frac{2858{,}80^2}{20}$$
$$= 794{,}9$$

$$SQErro = SQTotal - SQBlocos - SQTrat = 406{,}3$$

Conclusão: Como valor calculado foi superior ao valor tabelado, rejeita-se a hipótese da nulidade, ou seja, existe pelo menos uma diferença significativa entre as médias dos tratamentos.

b) **(0,40 pontos)**

$H_0: C_1 = 0$
$H_1: C_1 \neq 0$

$$\hat{C}_1 = \hat{m}_1 + \hat{m}_2 - 2\hat{m}_5 = 142,80 + 138,02 - 2(155,12) = -29,42.$$

$$S = \sqrt{\frac{(5-1) \times 3,26 \times 33,86 \times \left[(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2\right]}{4}} = 25,73.$$

A estimativa do $|\hat{C}_1|$ é superior ao valor de S, portanto o contraste é significativamente diferente de zero.

9. Considere os resultados obtidos de um experimento fatorial 5x4, instalado segundo o delineamento inteiramente casualizado (DIC) com 3 repetições e o nível de 5% de significância, quando necessário:

Quadro auxiliar: totais de tratamentos

	B1	B2	B3	B4	Totais
A1	53,3	52,8	53,3	51,3	210,7
A2	47,9	44,2	48,7	51,0	191,8
A3	51,8	47,5	48,9	47,8	196,0
A4	50,0	44,2	48,9	51,2	194,3
A5	58,9	48,7	51,8	51,9	211,3
Totais	261,9	237,4	251,6	253,2	1004,1

Tabela da Análise de Variância

FV	GL	SQ	QM	F
A		29,55		
B		20,60		
AxB				
Erro				
Total		137,58		

Com base nas informações fornecidas, pede-se:

a) Complete o quadro da Análise de Variância e verifique se os fatores A e B atuam independentemente? Justifique a sua resposta.

b) Com base no resultado do teste F para a interação, proceda ao estudo do fator B, indicando qual (is) nível (is) de B que apresenta (m) maior (es) média(s). Use o teste de Tukey, se necessário.

DADOS: SQTratamentos = 70,26;

$F_{(5\%;\,3,\,40)} = 2{,}84$; $F_{(5\%;\,4,\,40)} = 2{,}61$; $F_{(5\%;\,12,\,40)} = 2{,}00$;

$q_{(5\%;\,3,\,40)} = 3{,}44$; $q_{(5\%;\,4,\,40)} = 3{,}79$; $q_{(5\%;\,5,\,40)} = 4{,}04$;

$$DMS = \Delta = q_{(5\%;\,\mathrm{I};\,\mathrm{GLErro})}\sqrt{\frac{QMErro}{r}}\ .$$

Solução:

a) **(0,60 pontos)**

Tabela da Análise de Variância

FV	GL	SQ	QM	F
A	4	29,55	7,38	
B	3	20,60	6,86	4,08
AxB	12	20,11	1,67	0,99
Erro	40	67,32	1,68	
Total	59	137,58		

$$SQTrat = \frac{1}{3}(53{,}3^2 + 52{,}8^2 + \cdots + 51{,}90^2) - \frac{1004{,}1^2}{60} = 70{,}26$$

$$SQAxB = SQTrat - SQA - SQB = 70{,}26 - 29{,}55 - 20{,}60 = 20{,}11$$

H_0: Os fatores A e B atuam independentemente

H_1: Os fatores A e B não atuam independentemente

Como valor calculado para a interação (AxB) foi inferior ao valor tabelado, tem-se que a mesma é não significativa, isto é, os fatores A e B atuam independentemente.

b) **(0,40 pontos)**

$H_0: m_{B_1} = m_{B_2} = m_{B_3} = m_{B_4} = m$

H_1:não H_0

O valor de F calculado para B foi superior ao valor tabelado, isto é, o efeito do fator B é significativo. Portanto, para identificar maiores médias deve-se utilizar o teste de Tukey.

$$DMS = \Delta = 3{,}79\sqrt{\frac{1{,}68}{15}} = 1{,}27$$

$\hat{m}_{B_1}$= 17,46 a

$\hat{m}_{B_4}$= 16,88 ab

$\hat{m}_{B_3}$= 16,77 ab

$\hat{m}_{B_2}$= 15,83 b

Médias seguidas de mesma letra não diferem estatisticamente entre si, pelo teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade. As maiores médias referem-se aos níveis B_1, B_3 e B_4 .

10. Considere o seguinte experimento:

    Dois pesquisadores conduziram um experimento com a finalidade de verificar qual a cultivar de abacaxi que se comportava melhor em determinado tipo de solo. Para isso plantaram três cultivares de abacaxi (1.Pérola, 2.C3 e 3.Smooth Cayenne), em condições completamente homogêneas, cada uma em 10 parcelas de 3,6x9m, definidas aleatoriamente na área experimental. As características avaliadas foram: peso do fruto (kg), diâmetro do fruto (cm) e peso da coroa (g), sendo que estas foram medidas em uma área útil de 1,8x7m, isto é, desprezando-se as linhas laterais de plantio e 1m nas cabeceiras da parcela. Deste experimento, defina:

    a) O FATOR em estudo e os NÍVEIS desse fator;
    b) A(s) VARIÁVEL(IS) RESPOSTA(S);
    c) A PARCELA ou UNIDADE EXPERIMENTAL;
    d) O número de REPETIÇÕES;
    e) Foi utilizada BORDADURA? Justifique sua resposta;
    f) O OBJETIVO do experimento;
    g) O esquema da Análise de Variância, com as fontes de variação (FV) e os graus de liberdade (GL).

<u>Solução:</u>

a) O FATOR em estudo e os NÍVEIS desse fator;

O fator é cultivar, com três níveis: Pérola, C3 e Smooth Cayenne. **(0,15 pontos)**

b) A(s) VARIÁVEL(IS) RESPOSTA(S);

São três variáveis respostas: peso do fruto (kg), diâmetro do fruto (cm) e peso da coroa (g). **(0,15 pontos)**

c) A PARCELA ou UNIDADE EXPERIMENTAL;

Cada parcela correspondia a uma área de 3,6x9m, perfazendo um total de 32,4 m^2. **(0,15 pontos)**

d) O número de REPETIÇÕES;

O número foi igual a 10 repetições. **(0,10 pontos)**

e) Foi utilizada BORDADURA? Justifique sua resposta;

Sim, pois a parcela tinha 3,6x9m (32,4 m^2) e os dados foram coletados em uma área útil de de apenas 1,8x7m, ou seja, 12,6 m^2, sendo a bordadura composta pelas linhas laterais de plantio e 1m nas cabeceiras da parcela. **(0,15 pontos)**

f) O OBJETIVO do experimento;

Verificar qual a cultivar de abacaxi que se comportava melhor em determinado tipo de solo. **(0,15 pontos)**

g) O esquema da Análise de Variância, com as fontes de variação (FV) e os graus de liberdade (GL). **(0,15 pontos)**

FV	GL
Cultivar	2
Erro	27
Total	29