MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária

Prova do Processo Seletivo para o Doutorado 2015/01

1) Para a função $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 4y$, obtenha, caso existam, seus pontos críticos e os classifique como pontos de máximo, pontos de mínimo ou pontos de sela.

$$f_x(x,y) = 6x - 2y \qquad\qquad f_y(x,y) = -2x + 2y + 4$$

$$f_x(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x$$

$$f_y(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 2y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 6x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -1 \qquad \Rightarrow \quad y = -3$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 \qquad\qquad f_{xx}(x,y) = 6 \qquad\qquad f_{xy}(x,y) = -2$$

$$\det\begin{bmatrix} f_{xx}(-1,-3) & f_{xy}(-1,-3) \\ f_{xy}(-1,-3) & f_{yy}(-1,-3) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 12 - 4 = 8$$

Então, o ponto $(-1,-3)$ é um ponto de mínimo relativo.

2) Calcule as derivadas parciais abaixo

$$(a) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy+1}{x^2-y^2}\right)$$ (40 %)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy+1}{x^2-y^2}\right) = \frac{(x^2-y^2)\,y - (xy+1)\,2x}{(x^2-y^2)^2}$$

(b) $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(e^{3x^2+y^2+z^2+3}\right)$ (60 %)

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(e^{3x^2+y^2+z^2+3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(e^{3x^2+y^2+z^2+3}\right)(6x)\right]$$

$$= \left(e^{3x^2+y^2+z^2+3}\right)(6x)(2y)$$

3) (a) Calcule a integral dupla $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+yx)dydx$ (50 %)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+yx)dydx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y+xy^2\right]_{y=-1}^{y=1}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(x^2+x\right)-\left(x-x^2\right)\right]_{y=-1}^{y=1}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

(b) Determine, por integração, a área do triângulo retângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. (50 %)

$$\int_0^4 \frac{3}{4}x\,dx = \left[\frac{3}{8}x^2\right]_0^4 = 6$$

Soluções diferentes são possíveis, dependendo da posição em que se coloca o triângulo nos eixos coordenados.

Fórmulas:

Se $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ e $f_{xx} > 0$ $\Rightarrow$ ponto de mínimo

Se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$ $\Rightarrow$ ponto de máximo

Se $D < 0$ $\Rightarrow$ ponto de sela

Se $D = 0$ nada se pode afirmar

Anunciado para as questões 4 e 5: Seja $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra i.i.d. de uma distribuição $normal\left(\mu,\sigma^2\right)$. Estimadores pontuais para a esperança e a variância são, respectivamente, $\widehat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$ e $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=S^2$.

4) (a) Mostre que $\widehat{\mu}$ é um estimador não viesado de μ. (35 %)

$$E\left[\widehat{\mu}\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

(b) Calcule a esperança $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]$, sabendo que $E\left[\widehat{\sigma^2}\right]=\sigma^2$

(35 %)

$$E\left[\widehat{\sigma^2}\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\frac{n}{n-1}E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(c) Se $x_1,\ldots,x_n$ é uma realização da amostra i.i.d $X_1,\ldots,X_n$, sua verossimilhança é definida como

$$L\left(\mu,\sigma^2\mid x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}\right].$$

Supondo $\sigma^2=1$, mostre que $\overline{X}$ é o estimador de máxima verossimilhança para μ. (30 %)

$$\sigma^2=1 \;\Rightarrow\; L\left(\mu\mid x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(x_i-\mu\right)^2}\right]$$

A logverossimilhança:

$$\ln L(\mu \mid x_1,\dots,x_n) \;= \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}\right]\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2$$

Derivando:

$$\frac{d}{d\mu}\ln L(\mu \mid x_1,\dots,x_n) \;= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i) - n\mu$$

$$\frac{d}{d\mu}\ln L(\mu \mid x_1,\dots,x_n) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i) - n\hat{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) = \overline{x}$$

5) (a) Sabendo que $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ tem distribuição *t* de Student com $n-1$ graus de liberdade. Considerando $n=9$ tem-se que

$P[T \le 2.306] = 0.975$. Dada uma amostra de tamanho 9, com média amostral $\overline{x} = 0.45$ e desvio padrão amostral $s = 0.852$, estabeleça um intervalo de confiança, a 95%, para a esperança populacional μ.

(50 %)

Pela simetria da distribuição *t* de Student:

$$P[T \le 2.306] = 0.975 \qquad \Rightarrow \qquad P[-2.306 \le T \le 2.306] = 0.95$$

$$\Rightarrow \qquad P\left[-2.306 \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le 2.306\right] = 0.95$$

$$\Rightarrow \qquad P\left[\overline{X} - 2.306\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + 2.306\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

A realização do IC é dada por:

$$\left(0,45-2.306\frac{0,852}{\sqrt{9}},\quad 0,45+2.306\frac{0,852}{\sqrt{9}}\right)=\left(-0,205,\quad 1,105\right)$$

(b) Em testes de hipótese, rejeitar e hipótese nula H_0 quando esta é verdadeira, é denominado *erro tipo I* . A probabilidade de ocorrência de *erro tipo I*, é denominada *taxa de erro tipo I*. Uma moeda é jogada 3 vezes. A hipótese nula de que a moeda é honesta é rejeitada caso ocorram 3 resultados iguais. Determine a taxa de *erro tipo I*. (50 %)

Sob a hipótese nula:

$$P[erro\ \ tipo\, I] \quad = P\left[\left(cara, cara, cara\right)\right] + P\left[\left(coroa, coroa, coroa\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

6) (a) Se uma moeda honesta é jogada 5 vezes, qual a probabilidade do resultado $\left(cara, coroa, cara, coroa, cara\right)$. (50 %)

$$P\left[\left(cara, coroa, cara, coroa, cara\right)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(b) Se duas moedas honestas são jogadas simultaneamente uma única vez, qual a probabilidade de resultados iguais em ambas as moedas. (50 %)

$$P\left[\left(cara, cara\right)\right]+P\left[\left(coroa, coroa\right)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

7) Definição: O *q-ésimo* quantil de uma distribuição acumulada $F_X(x)$ é o menor valor ξ_q para o qual $F_X\left(\xi_q\right)\geq q$.

(a) Dado que *Z* tem distribuição normal padrão e o quantil 0.95 da normal padrão é $\xi_{0.95}=1.65$, calcule a probabilidade $P\left[-1.65\leq Z\leq 1.65\right]$.
(50 %)

$$P\left[-1.65\leq Z\leq 1.65\right] \quad = P\left[Z\leq 1.65\right]-P\left[Z\leq -1.65\right]$$

Pela simetria da distribuição normal:

$$= P\left[Z \le 1.65\right] - \left(1 - P\left[Z \le 1.65\right]\right)$$

$$= 0,95 - \left(1 - 0,95\right) = 0,9$$

(b) Se $Y \sim normal(5,100)$, $Z \sim normal(0,1)$, $P\left[Z \le 0.2\right] = 0.5793$ e $P\left[Z \le 1\right] = 0.8413$, determine a probabilidade $P\left[3 \le Y \le 15\right]$.

(50 %)

$$P\left[3 \le Y \le 15\right] = P\left[\frac{3-5}{10} \le \frac{Y-5}{10} \le \frac{15-5}{10}\right] = P\left[-0,2 \le Z \le 1\right]$$

$$= P\left[Z \le 1\right] - P\left[Z \le -0,2\right]$$

$$= P\left[Z \le 1\right] - \left(1 - P\left[Z \le 0,2\right]\right) = 0,8413 - \left(1 - 0,5793\right)$$

$$= 0,8413 - 0,4207 = 0,4206$$

8) Um experimento com a cultura da cana-de-açúcar foi instalado em parcela subdividida comparando-se nas parcelas três tipos de Preparos de Solo (1, 2 e 3) e nas subparcelas cinco Variedades (A, B, C, D, E). Foi utilizado um delineamento em blocos casualizados com três repetições. Os resultados obtidos para as produtividades (t/ha) forneceram a seguinte análise de variância e teste F:

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F_c
Preparos de Solo (P)	2	15.532,84	7.766,42	6,29*
Blocos	2	821,64	410,82	0,33ns
Erro Experimental (a)	4	4.938,36	1.234,59	
Variedades (V)	4	5.583,69	1.395,92	5,10**
Interação P*V	8	6.554,04	819,51	3,00**
Erro Experimental (b)	24	6.564,67	273,53	
Total	44	39.997,24		

(**) significativo no nível de 1% de probabilidade; (*) significativo no nível de 5% de probabilidade; (ns) não significativo.

Quadro de Interação (Preparos *Variedades)

Variedades	Preparos de Solo			Totais Variedades
	1	2	3	
A	351$^{(3)}$	336	429	**1.116**$^{(9)}$
B	280	352	303	**935**
C	277	305	446	**1.028**
D	281	299	472	**1.052**
E	345	365	527	**1.237**
Totais Preparos de Solo	**1.534**$^{(15)}$	**1.657**	**2.177**	**5.368**$^{(45)}$

i. De acordo com o teste F percebe-se houve interação entre os fatores estudados. Faça a análise de variância desdobrando a interação comparando as Variedades em cada Preparo de Solo (Variedades/Preparo de Solos), aplique o teste F e discuta os resultados e aplique o teste de Tukey ($\alpha = 5\%$) quando for o caso. Para todos os testes utilize como valor de tabela o número 4,0 (quatro).

$$DMS_{\alpha} = q_{\alpha}\sqrt{\frac{\text{QM Erro Experimental}}{J}}$$

$$\text{SQVaried/Prep.1} = \frac{1}{3}\left[351^2 + ...345^2\right] - \frac{1534^2}{15} = 158.772{,}0 - 156.877{,}1 = 1.894{,}9$$

$$\text{SQVaried/Prep.2} = \frac{1}{3}\left[336^2 + ...365^2\right] - \frac{1657^2}{15} = 184.150{,}3 - 183.043{,}3 = 1.107{,}1$$

$$\text{SQVaried/Prep.3} = \frac{1}{3}\left[429^2 + ...527^2\right] - \frac{2177^2}{15} = 325.093{,}0 - 315.955{,}3 = 9.137{,}7$$

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	Fc
Variedades/Preparo1	**4**	1.894,9	473,7	1,7ns
Variedades/Preparo2	**4**	1.107,1	276,8	1,0ns
Variedades/Preparo3	**4**	9.137,7	2.284,4	8,4*
Erro Experimental (b)	**24**	6.564,7	273,5	

Não houve diferença entre as Variedades de cana no Preparo de Solo 1. Não houve diferença entre as Variedades de cana no Preparo de Solo 2. Houve diferença entre as Variedades de cana no Preparo 3.

$$DMS_{\alpha} = q_{\alpha}\sqrt{\frac{\text{QM Erro Experimental}}{J}} = 4{,}0\sqrt{\frac{273{,}5}{3}} = 38{,}2$$

Médias das Variedades:

$$\bar{Y}_Z = \frac{527}{3} = 175{,}7 \text{ a} \qquad 175{,}7 - 38{,}2 = 137{,}5$$

$$\bar{Y}_Y = \frac{472}{3} = 157{,}3 \text{ a} \qquad 157{,}3 - 38{,}2 = 119{,}1$$

$$\bar{Y}_X = \frac{446}{3} = 148{,}7 \text{ a} \qquad 148{,}7 - 38{,}2 = 110{,}5$$

$$\bar{Y}_V = \frac{429}{3} = 143{,}0 \text{ a} \qquad 143{,}0 - 38{,}2 = 104{,}8$$

$$\bar{Y}_W = \frac{303}{3} = 101{,}0 \text{ b}$$

As variedades X, Y, V e Z tiveram médias de produtividade iguais, porém superiores à variedade W.

ii. Avalie a precisão do experimento.

$$\bar{Y}_{...} = \frac{G}{IJK} = \frac{5368}{45} = 119{,}3 \qquad CV_1 = \frac{100\sqrt{\text{QM Erro Exp. (a)}}}{\bar{Y}_{...}} = \frac{100\sqrt{1.234{,}6}}{119{,}3} = 29{,}5\%$$

$$CV_2 = \frac{100\sqrt{\text{QM Erro Exp. (b)}}}{\bar{Y}_{...}} = \frac{100\sqrt{273{,}5}}{119{,}3} = 13{,}9\%$$

A precisão experimental dos Preparos de Solo foi baixa (CV entre 20 e 30%). A precisão experimental das Variedades foi média (CV entre 10 e 20%).

9) Um pesquisador da área de forragicultura pretende instalar um experimento no campo para avaliar o desempenho de quatro gramíneas: A, B, C, D. A área disponível tem diferença de fertilidade e é necessário usar o delineamento em blocos casualizados com seis repetições. A parcela experimental será 10 linhas de plantio com 5m de comprimento, espaçadas de 0,40m.

Como bordadura serão eliminadas duas linhas de cada lateral da parcela bem como 1m de cada cabeceira.

i. Qual é o modelo estatístico que descreverá as observações do experimento. Explique todos os termos do modelo;

$$y_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij}$$

- y_{ij} o valor observado da parcela que foi plantada com a Gramínea i, no Bloco j
- μ o efeito da média geral;
- t_i o efeito da Gramínea i , com i = 1,2,3,4;
- b_j o efeito do Bloco j, com j = 1,2,...,6;
- e_{ij} o Erro Experimental associado à observação y_{ij}.

ii. Quais são as pressuposições que o modelo exige para que os resultados da análise de variância e dos testes estatísticos sejam válidos?

- Todos os efeitos envolvidos no modelo devem ser aditivos;
- Os erros experimentais devem ser independentes, devem ter variância homogênea e apresentar distribuição normal com media zero e variância σ^2

iii. Qual é a área total de cada parcela, da parcela útil e de cada bloco?

Área total da parcela: 5m x 4m = $20m^2$

Área da parcela útil: 3m x 2,4m = $7,2m^2$

Área de um bloco: 4 x 20 m^2 = $80m^2$

iv. Na implantação do experimento a recomendação é usar na semeadura de cada gramínea, 30 gramas de semente por m de linha. Quantos kg de semente de cada gramínea serão necessários para a instalação do experimento?

Cada parcela terá 10 linhas de 5m, logo 50m. Com 30 gramas de semente por m de linha, serão necessárias 30 x 50 = 1500g ou 1,5kg/parcela.

Cada gramínea terá seis repetições (blocos). Portanto 1,5 x 6 = 9 kg de sementes.

10) Num experimento conduzido em laboratório de sementes, foi avaliado o efeito de quatro reguladores de crescimento na germinação e outras características de sementes de milho. As condições experimentais eram homogêneas permitindo usar o delineamento inteiramente casualizado com cinco repetições e a unidade experimental constituiu-se de uma bandeja com 50 sementes. Os resultados obtidos para o "**IVA** – índice de envelhecimento acelerado das sementes" foram:

Reguladores	**Repetições**					**Totais (T_i)**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
A	40,2	49,3	40,1	43,0	52,4	**225,0**
B	42,0	44,5	53,0	54,5	51,0	**245,0**
C	47,1	55,5	53,3	53,4	50,7	**260,0**
D	38,1	45,9	40,7	40,6	39,7	**205,0**
Total						**G = 935,0**

Os reguladores foram os seguintes:

A – Stimulate; B – Booster;

C – ½ Stimulate + ½ Cellerate; D - Cellerate.

SQTotal = 663,51

i. Faça a análise de variância, aplique o teste F e discuta os resultados. Para todos os testes utilize como valor de tabela o número 4, 0 (quatro);

$$\text{SQReguladores} = \frac{1}{J}\sum_i T_i^2 - \frac{G^2}{IJ} = \frac{1}{5}\left[225^2 + ... + 205^2\right] - \frac{935^2}{20} = 44.055,00 - 43.711,25 = 343,75$$

SQErroExperimental = SQTotal - SQReguladores = 663,51 - 343,75 = 319,76

Fontes de Variação	**GL**	**SQ**	**QM**	**Fc**
Reguladores	**3**	343,75	114,58	5,73*

Erro Experimental	**16**	319,76	19,98
Total	**19**	663,51	

Houve diferença entre os Reguladores de crescimento ao nível de 5% de probabilidade.

ii. Aplique o teste de Scheffé (α = 5%), para avaliar os reguladores "Stimulate" e "Cellerate" utilizados isoladamente contra misturados;

$$\bar{Y}_A = \frac{T_A}{J} = \frac{225}{5} = 45{,}0; \quad \bar{Y}_B = 49{,}0; \quad \bar{Y}_C = 52{,}0; \quad \bar{Y}_D = 41{,}0$$

$$\hat{Y}_1 = \bar{Y}_A - 2\bar{Y}_C + \bar{Y}_D = 45{,}0 + 2(52{,}0) + 41{,}0 = \text{-}18{,}0$$

$$\hat{Var}(\hat{y}) = \frac{\text{QM Erro Exp.}}{J}\sum_i C_i^2 = \frac{19{,}98}{5}\left[1^2 + (\text{-}2)^2 + 1^2\right] = \frac{19{,}98(6)}{5} = 23{,}98$$

$$DMS = \sqrt{(I\text{-}1)F_\alpha .\ \hat{Var}(\hat{y})} = \sqrt{(4\text{-}1)*4*23{,}98} = 16{,}96$$

$$\left|\hat{Y}_1\right| = \left|\text{-}18{,}0\right| = 18{,}0^*.$$

Como 18,0 > 16,96. Rejeita-se H_0.

O contraste é considerado não nulo, ou seja, com base nos valores médios do IVA os Reguladores Stimulate e Cellerate "Misturados" são mais eficientes do que "Isolados".

iii. Aplique o teste de Scheffé (α = 5%), para comparar o regulador Booster contra os demais reguladores juntos.

$$\bar{Y}_A = 45{,}0; \quad \bar{Y}_B = 49{,}0; \quad \bar{Y}_C = 52{,}0; \quad \bar{Y}_D = 41{,}0$$

$$\hat{Y}_2 = \bar{Y}_A - 3\bar{Y}_B + \bar{Y}_C + \bar{Y}_D = 45{,}0 - 3(49{,}0) + 52{,}0 + 41{,}0 = \text{-}9{,}0$$

$$\hat{Var}(\hat{y}) = \frac{\text{QM Erro Exp.}}{J}\sum_i C_i^2 = \frac{19{,}98}{5}\left[1^2 + (\text{-}3)^2 + 1^2 + 1^2\right] = \frac{19{,}98(12)}{5} = 47{,}95$$

$$DMS = \sqrt{(4\text{-}1)*4*47{,}95} = 23{,}99$$

$$\left|\hat{Y}_2\right| = \left|\text{-}9{,}0\right| = 9{,}0\text{ns}.$$

Como 9,0 < 23,99. Aceita-se H_0.

O contraste é considerado nulo. Portanto com base nos valores médios do IVA, o regulador "Booster" tem o mesmo efeito médio dos demais reguladores juntos.