UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
DEPATAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária

Prova do Processo Seletivo para Doutorado 2016-1

Nº de inscrição do candidato: _______________

- Utilizar APENAS o número de inscrição para identificar a sua prova;
- A interpretação das questões é parte da avaliação;
- Indique todos os cálculos organizadamente;
- São DEZ (10) questões, valendo UM (1) ponto cada, totalizando 10 pontos;
- O tempo máximo para a realização desta prova é de 4 horas;
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta (azul ou preta) e é permitido utilizar somente a calculadora.
- BOA SORTE !!

1) Determine os valores de mínimo e máximo local ou pontos de sela da função abaixo:

$$f(u,v) = (u^2 + v^2)e^{v^2-u^2}.$$

$$f_u(u,v) = -2ue^{v^2-u^2}\left(u^2+v^2-1\right)$$

$$f_v(u,v) = 2ve^{v^2-u^2}\left(u^2+v^2+1\right)$$

Igualando as derivadas parciais $f_u(u,v)$ e $f_v(u,v)$ a zero tem-se que os pontos críticos são P(-1, 0); P (0,0) e P(1,0).

$f_{uu}(-1,0) = -4e^{-1}$ $\quad f_{uu}(0,0) = 2$ $\quad f_{uu}(1,0) = -4e^{-1}$

$f_{vv}(-1,0) = 4e^{-1}$ $\quad f_{vv}(0,0) = 2$ $\quad f_{vv}(1,0) = 4e^{-1}$

$f_{uv}(-1,0) = 0$ $\quad f_{uv}(0,0) = 0$ $\quad f_{uv}(1,0) = 0$

Considere $D = f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2$. Assim, para o ponto P(-1,0), P(0,0) e P(1,0) ter-se-ão: $D_1 = -16e^{-1}$; $D_2 = 4$ e $D_3 = -16e^{-1}$. Logo, os pontos P(-1,0) e P(1,0) são pontos sela e P(0,0) é ponto de mínimo local, sendo o mínimo igual a 0.

Nota: Encontrou corretamente as derivadas parciais (0,4 pts)

Calculou o valor de D (determinante) (0,4 pts)

Concluiu corretamente ao respeito dos pontos de mínimo, máximo e sela (0,2 pts)

2) Considere que a função densidade de probabilidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y seja

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(1+y) \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \quad \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

<u>OBSERVAÇÕES</u>: Para que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade, $f(x,y) \geq 0$ e $\iint f(x,y)\,\text{dx dy} = 1$. Além disso, $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\text{dx dy}$.

a) Determine o valor da constante k. **(0,3 pts)**

$$\int_0^2 \int_0^1 kx(1+y)dxdy = 1$$

$$\int_0^2 \int_0^1 kx(1+y)dxdy = \int_0^2 \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{kyx^2}{2}\right|_0^1 dy = \int_0^2 \frac{k}{2} + \frac{ky}{2} dy$$

$$\int_0^2 \int_0^1 kx(1+y)dxdy = \left.\frac{ky}{2}\right|_0^2 + \left.\frac{ky^2}{4}\right|_0^2 = k + k = 2k$$

Assim,

$$\int_0^2 \int_0^1 kx(1+y)dxdy = 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

b) Calcule $P(X \leq 1, Y \leq 1)$. **(0,3 pts)**

$$P(X \leq 1, Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}x(1+y)\,dxdy = \int_0^1 \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{yx^2}{4}\right|_0^1 dy = \left.\frac{y}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{y^2}{8}\right|_0^1 = \frac{3}{8}$$

c) Calcule $P(X + Y \leq 1)$. **(0,4 pts)**

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{1}{2}x(1+y)\,dxdy = \int_0^1 \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^{1-y} + \left.\frac{yx^2}{4}\right|_0^{1-y} dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^2 + y(1-y)^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^1 1 - y - y^2 + y^3 dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(y|_0^1 - \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{48}$$

3) Calcule a integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dxdy$. Esboce a região de integração.

** QUESTÃO ANULADA DEVIDO A UM ERRO DE DIGITAÇÃO **

Todos os candidatos receberam 1,0 ponto pela questão

4) A urna ***A*** contém 4 bolas pretas e 6 bolas brancas e a urna ***B*** contém 6 bolas pretas e 4 bolas brancas. Uma das urnas é escolhida ao acaso e uma bola é retirada.

a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser preta. **(0,25 pts)**

$$P[BO=pr] = P[BO=pr\,|\,UR=A]P[UR=A] + P[BO=pr\,|\,UR=B]P[UR=B]$$

$$= \frac{4}{10}\frac{1}{2}+\frac{6}{10}\frac{1}{2}=\frac{4+6}{20}=\frac{1}{2}$$

b) Considere a variável aleatória X, definida por

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se a bola retirada é preta;} \\ 0 & \text{se a bola retirada é branca.} \end{cases}$$

Calcule a esperança e a variância de X. **(0,25 pts)**

$$E[X] = 0\cdot P[X=0]+1\cdot P[X=1] = 1\cdot P[BO=pr] = \frac{1}{2}$$

$$V[X] = E[X^2]-[E(X)]^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$E[X^2] = 0^2\cdot P[X=0]+1^2\cdot P[X=1] = 1\cdot P[BO=pr] = \frac{1}{2}$$

c) Considere a variável aleatória Y definida como o número de bolas pretas retiradas se o experimento de se "escolher uma urna ao acaso e retirar uma bola" é repetido 100 vezes, em que as bolas retiradas são repostas em suas urnas, isto é, o experimento é com reposição. A desigualdade de Chebyshev estabelece que, para uma variável aleatória W com variância finita,

$$P[|W-\mu_W| < r\sigma_W] \geq 1-\frac{1}{r^2},$$

em que μ_W é a esperança de W e σ_W é seu desvio padrão.

Utilizando esta desigualdade, calcule um limite inferior para a probabilidade do número de bolas pretas, em 100 retiradas, estar entre 41 e 59. **(0,25 pts)**

$$Y \sim binomial\left(100,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow E[Y]=50,\ \text{var}[Y]=\sigma_Y^2=25 \text{ e } \text{dp}[Y]=\sigma_Y=5$$

$$P\left[\left|Y-\mu_Y\right|<r\sigma_Y\right]\geq 1-\frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad P\left[\left|Y-50\right|<5r\right]\geq 1-\frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left[-5r<Y-50<5r\right]\geq 1-\frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left[50-5r<Y<50+5r\right]\geq 1-\frac{1}{r^2}$$

Então: $r=2$ e $P\left[40<Y<60\right]\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

d) O teorema de Moivre-Laplace afirma que, se uma variável aleatória W tem distribuição binomial com parâmetros n e p, então

$$P\left[a\leq \frac{W-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq b\right]=P\left[np+a\sqrt{np(1-p)}\leq W\leq np+b\sqrt{np(1-p)}\right]$$

pode ser aproximada, se n é grande, por $\Phi(b)-\Phi(a)$, em que $\Phi(\cdot)$ é a acumulada da normal padrão. Utilizando tal fato, calcule novamente a probabilidade de se retirar entre 41 e 59 bolas pretas, em 100 retiradas com reposição. **(0,25 pts)**

$$P\left[41\leq W\leq 59\right] \Rightarrow np+a\sqrt{np(1-p)}=41$$

$$50+5a=41$$

$$a=-1{,}8$$

$$\Rightarrow \quad np+b\sqrt{np(1-p)}=59$$

$$50+5b=59$$

$$b=1{,}8$$

$$P\left[a\leq \frac{W-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq b\right]\cong \Phi(1{,}8)-\Phi(-1{,}8)=0{,}9641-(1-0{,}9641)=0{,}9282$$

5) a) Se X é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, calcule a esperança de X^2. **(0,3 pts)**

$$E\left[X^2\right]=\text{var}\left[X\right]+\left(E\left[X\right]\right)^2=1+0=1$$

b) Se X tem distribuição normal, ou seja, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, obtenha a função densidade de probabilidade de $Y = e^X$. **(0,4 pts)**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln(y) \quad \text{e} \quad dx = \frac{1}{y}dy$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = f_X(\ln(y))\frac{1}{y} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

c) Considere as distribuições de probabilidade:

(1) Poisson, em que $f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{caso } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(2) Exponencial, em que $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, caso $x \geq 0$.

(3) Geométrica, em que $f(x;p) = \begin{cases} p(1-p)^x, & \text{caso } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(4) Distribuição *t-Student*, definida por $\frac{Z}{\sqrt{U/k}}$, em que Z é uma normal padrão e U uma qui-quadrado com k graus de liberdade.

(5) Distribuição F definida por $\frac{U/m}{V/n}$, em que U e V têm distribuição qui-quadrado com, respectivamente, m e n graus de liberdade.

Pergunta-se: quais dessas distribuições têm moda em $x = 0$? **(0,3 pts)**

Resposta: (2), (3) e (4)

6) a) Um dos métodos de estimação mais utilizados é denominado método dos momentos e consiste em igualar os momentos populacionais $E[X^r]$ com os momentos amostrais $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$. Obtém-se assim um sistema de equações que, quando pode ser resolvido para os parâmetros de interesse, resulta nos estimadores. Para uma variável aleatória $normal\left(\mu,\sigma^2\right)$, resolva o sistema

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E\left[X^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

e obtenha os estimadores para μ e σ^2. **(0,5 pts)**

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n \\ \sigma^2 + \mu^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{X}_n \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\bar{X}_n\right)^2 \end{aligned}$$

b) Outro método de estimação muito importante é o da máxima verossimilhança, que consiste em maximizar a função de verossimilhança. Dada uma amostra aleatória $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$, obtenha o estimador de máxima verossimilhança de λ para a densidade exponencial $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$. **(0,5 pts)**

$$L\left(\lambda \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_j} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

$$l = \ln\left(L\left(\lambda \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right)\right) = n\ln(\lambda) + -\lambda\sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

7) a) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra *i.i.d.* de uma $normal(\theta, 1)$, obtenha um intervalo de confiança a 95% para θ em termos da média amostral $\bar{X}_n$. **(0,4 pts)**

$$\bar{X}_n \sim normal\left(\theta, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{1/n}} \sim normal(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad P\left[-z_{0,975} \leq \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{1/n}} \leq z_{0,975}\right] = 0,95$$

Pivotando: $\theta \in \left(\bar{X}_n - z_{0,975}\sqrt{1/n}, \bar{X}_n + z_{0,975}\sqrt{1/n}\right)$

$$\theta \in \left(\bar{X}_n - 1,96\sqrt{1/n}, \bar{X}_n + 1,96\sqrt{1/n}\right)$$

b) Se $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é um estimador de θ, o erro quadrático médio de T é definido como a esperança $E_\theta[(T-\theta)^2]$. Prove que:

$E_\theta[(T-\theta)^2] = \mathrm{var}[T] + (\theta - E_\theta[T])^2$. **(0,3 pts)**

$$E_\theta\left[(T-\theta)^2\right] = \mathrm{var}[T] + \left(\theta - E_\theta[T]\right)^2$$

$$\begin{aligned}
E_\theta\left[(T-\theta)^2\right] &= E_\theta\left[\left(T - E_\theta[T] + E_\theta[T] - \theta\right)^2\right] \\
&= E_\theta\left[\left(\left(T - E_\theta[T]\right) + \left(E_\theta[T] - \theta\right)\right)^2\right] \\
&= E_\theta\left[\left(T - E_\theta[T]\right)^2\right] + E_\theta\left[\left(E_\theta[T] - \theta\right)^2\right] \\
&\quad + 2\left(E_\theta[T] - \theta\right)\underbrace{E_\theta\left[\left(T - E_\theta[T]\right)\right]}_{=0} \\
&= E_\theta\left[\left(T - E_\theta[T]\right)^2\right] + E_\theta\left[\left(E_\theta[T] - \theta\right)^2\right] \\
&= \mathrm{var}[T] + \left(\theta - E_\theta[T]\right)^2
\end{aligned}$$

c) O teste de hipótese obtido pela razão de verossimilhanças:

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com densidade $f(x;\theta)$, em que $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_1$. A hipótese nula é $H_0: \theta = \theta_0$ e a hipótese alternativa é $H_1: \theta = \theta_1$. A razão das verossimilhanças é dada por:

$$\lambda = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}.$$

O teste consiste em: rejeitar H_0 se $\lambda < k$ ou aceitar H_0 se $\lambda > k$.

Considere que uma única observação x é obtida de uma população exponencial $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$. Se a hipótese nula é $H_0: \theta = \theta_0 = 2$ e a hipótese alternativa é $H_1: \theta = \theta_1 = 1$, em termos de região crítica $\mathcal{C}$, o teste é: rejeitar H_0 se $x \in \mathcal{C}$. Sendo k_1, k_2, k_3 e k_4 constantes convenientemente escolhidas para que o teste tenha o tamanho α que se deseja, assinale a opção correta relativa à região crítica $\mathcal{C}$: **(0,3 pts)**

(a) $\mathcal{C} = \{x \geq k_1\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{x \leq k_2\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{k_3 \leq x \leq k_4\}$;

(d) nenhuma delas.

A razão de verossimilhanças: $\lambda = \lambda(x) = \dfrac{2e^{-2x}}{e^{-x}} = 2e^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{rejeitar } H_0 \text{ se } \lambda < k \quad &\Leftrightarrow \quad \text{rejeitar } H_0 \text{ se } e^{-x} < k/2 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{rejeitar } H_0 \text{ se } e^{-x} < k/2 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{C} = \{x \geq k_1\} \end{aligned}$$

8) Um experimento foi realizado para avaliar diferentes tipos de adubos sobre a produção de cenouras (em t/ha), sendo utilizado o delineamento em blocos casualizados, com cinco repetições. Os tratamentos utilizados e os respectivos totais de cada tratamento são:

Tratamentos	Totais
1: Adubo verde (AV)	380
2: Composto orgânico (CO)	400
3: AV + Biofertilizante aplicado no solo	490
4: AV + Biofertilizante aplicado na planta	370
5: CO + Biofertilizante aplicado no solo	300
6: CO + Biofertilizante aplicado na planta	480
Soma	2420

Dado: $DMS = \Delta = q_{(5\%;\,\mathrm{I};\,\mathrm{GLErro})}\sqrt{\frac{QMErro}{r}}$; $DMS = S = \sqrt{(I-1)F_\alpha \frac{QMErro}{r} \sum_{i=1}^{I} c_i^2}$

$F_{(5\%;\,1,\,20)} = 4{,}35$; $F_{(5\%;\,2,\,20)} = 3{,}49$; $F_{(5\%;\,3,\,20)} = 3{,}10$; $F_{(5\%;\,4,\,20)} = 2{,}87$; $F_{(5\%;\,5,\,20)} = 2{,}71$; $F_{(5\%;\,1,\,16)} = 4{,}49$; $F_{(5\%;\,2,\,16)} = 3{,}63$; $F_{(5\%;\,3,\,16)} = 3{,}24$; $F_{(5\%;\,4,\,16)} = 3{,}01$; $F_{(5\%;\,5,\,16)} = 2{,}85$; $q_{(5\%;\,5,\,16)} = 4{,}33$; $q_{(5\%;\,6,\,16)} = 4{,}56$; $q_{(5\%;\,5,\,20)} = 4{,}23$; $q_{(5\%;\,6,\,20)} = 4{,}45$.

a) Planeje como este experimento ou esse conjunto de tratamentos pode ser analisado, indique: **(0,3 pts)**

i) o modelo linear apropriado para descrever o experimento e os significados de seus componentes;

ii) as hipóteses que estão sendo avaliadas;

iii) quantas unidades experimentais foram utilizadas no experimento.

O experimento pode ser analisado de duas maneiras:
1º) Estrutura de um fatorial 2x3, com os fatores e níveis dados por:
- Tipos de adubos: AV e CO;
- Modo de aplicação do biofertilizante: sem, no solo e na planta;

i) $y_{ijk} = \mu + b_j + a_i + B_k + aB_{ik} + e_{ijk}$,
em que
y_{ijk} representa os valores observados;
μ constante;
a_i efeito do i-ésimo tipo de adubo, $i = 1{,}2$;
b_j efeito do j-ésimo bloco, $j = 1, 2, 3, 4, 5$;
B_k efeito do k-ésimo modo de aplicação do biofertilizante, $k = 1, 2, 3$;
aB_{ik} efeito dinteração tipo x modo de aplicação;
e_{ijk} erro experimental associado à observação y_{ijk}, tais que $e_{ijk} \sim N(0; \sigma^2)$.

ii) $\begin{cases} H_0: a_1 = a_2, \text{ os tipos de adubos não diferem entre si} \\ H_a: a_1 \neq a_2 \end{cases}$

$\begin{cases} H_0: B_1 = B_2 = B_3, \text{ os modos de alicação do biofertilizante não diferem entre si} \\ H_a: B_k \neq B_{k'}, \text{para pelo menos um } k \neq k' \end{cases}$

$\begin{cases} H_0: aB_{ij} = 0 \\ H_a: aB_{ij} \neq 0\text{ , para ao menos um } ij \end{cases}$

iii) 6 tratamentos x 5 repetições = 30 unidades experimentais.

2º) considerar uma estrutura de tratamentos com apenas um fator;

i) $y_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij}$,
em que
y_{ij} representa os valores observados;
μ constante;
t_i efeito do i-ésimo tratamento, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;
b_j efeito do j-ésimo bloco, $j = 1, 2, 3, 4, 5$;
e_{ij} erro experimental associado à observação y_{ij}, tais que $e_{ij} \sim N(0; \sigma^2)$.

ii) $\begin{cases} H_0: t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6, \text{ os tratamentos não diferem entre si} \\ H_a: t_i \neq t_{i'} \text{ para pelo menos um } i \neq i' \end{cases}$

iii) 6 tratamentos x 5 repetições = 30 unidades experimentais.

b) Considerando os totais de tratamentos e sendo que, QMErro = 240,00 e o F calculado para blocos é 3,00, obtenha a tabela completa de análise da variância; **(0,2 pts)**

Quadro auxiliar

	Aplicação do biofertilizante			
Tipos de adubo	Sem	Solo	Planta	Totais
AV	$380^{(5)}$	490	370	$1240^{(15)}$
CO	400	300	480	1180
Totais	$780^{(10)}$	790	850	$2420^{(30)}$

$$SQTrat = \frac{1}{5}(380^2 + \cdots + 480^2) - \frac{(2420)^2}{30} = 5146,67$$

$$SQTipos = \frac{1}{15}(1240^2 + 1180^2) - \frac{(2420)^2}{30} = 120,00$$

$$SQApB. = \frac{1}{10}(780^2 + 790^2 + 850^2) - \frac{(2420)^2}{30} = 286,67$$

$$SQTiposXApB = SQTrat - SQTipos - SQApB = 4740,00$$

Tabela da Análise de Variância

FV	GL	SQ	QM	F_c	F_t
Blocos	4	2880,00	720,00	$3,00^*$	2,87
(Tratamentos)	(5)	(5146,67)	1029,33	$4,29^*$	2,71
Tipos	1	120,00	120,00	$0,50^{ns}$	4,35
ApBiof.	2	286,67	143,33	$0,60^{ns}$	3,49
T x ApBiof.	2	4740,00	2370,00	$9,88^*$	3,49
Erro	20	4800,00	240,00		
Total	29	12826,67			

* Significativo a 5%; ^{ns} Não significativo.

c) Considerando o nível de significância de 5% de probabilidade, interprete os resultados obtidos de a análise da variância (lembrando as hipóteses); **(0,1 pts)**

- Houve diferença significativa entre os tratamentos;
- Não houve diferença significativa entre os dois tipos de adubos (AV = CO);
- Não houve diferença significativa entre os modos de aplicação do biofertilizante (Sem = solo = planta);
- Os tipos de adubos e modeos de aplicação do biofertilizante são dependentes, ou seja, a interação entre esses fatores é significativa.

d) Se necessário, aplique o teste de Tukey (α = 5%) e interprete o resultado; **(0,2 pts)**

$$DMS = \Delta = q_{(5\%;\,6,\,20)}\sqrt{\frac{QMErro}{r}} = 4{,}45\sqrt{\frac{240{,}0}{5}} = 30{,}8 \cong 31$$

$$\hat{m}_3 = \frac{490}{5} = 98 \ \text{a}$$

$$\hat{m}_6 = \frac{480}{5} = 96 \ \text{a}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{400}{5} = 80 \ \text{a b}$$

$$\hat{m}_1 = \frac{380}{5} = 76 \ \text{a b}$$

$$\hat{m}_4 = \frac{370}{5} = 74 \ \text{a b}$$

$$\hat{m}_5 = \frac{300}{5} = 60 \quad \text{b}$$

Tabela de médias

Tratamentos	Médias	
1. Adubo verde (AV)	76	ab
2. Composto orgânico (CO)	80	ab
3. AV + Biofertilizante aplicado no solo	98	a
4. AV + Biofertilizante aplicado na planta	74	ab
5. CO + Biofertilizante aplicado no solo	60	b
6. CO + Biofertilizante aplicado na planta	96	a

e) Utilizando-se o teste de Scheffé (α = 5%), teste o seguinte contraste, interpretando corretamente o resultado: **(0,2 pts)**

Y: ausência de biofertilizantes contra presença de biofertilizantes

$$Y = 2\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 - \mu_6$$

$$\hat{Y} = 2 \cdot 76 + 2 \cdot 80 - 98 - 74 - 60 - 96 = -16$$

$$DMS = S = \sqrt{(I-1)F_\alpha \frac{QMErro}{r} \sum_{i=1}^{I} c_i^2}$$

$$= \sqrt{(6-1) \cdot F_{(5\%;\, 5,20)} \cdot \frac{240}{5} \cdot (2^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2)}$$

$$= \sqrt{5 \cdot 2{,}71 \cdot 48 \cdot 12} = 88{,}3$$

Como $|\hat{Y}| < S$, o contraste é não significativo, indicando que não houve diferença entre ausência e presença de biofertilizante.

9) Num artigo científico foram apresentados os resultados abaixo referentes a um experimento em parcelas subdivididas instalado segundo o delineamento em blocos casualizados, com cinco repetições, em que o fator A foi distribuído às parcelas e o fator B às subparcelas:

- Tabela de médias:

	A_1	A_2	A_3	
B_1	23,80	14,00	13,20	17,00 a
B_2	21,60	11,60	13,60	15,60 b
	22,70 A	12,8 B	13,40 B	

As médias seguidas por uma mesma letra maiúscula na linha, ou por uma mesma letra minúscula na coluna, não diferem entre si ao nível de 5% de probabilidade, pelo teste de Tukey e pelo teste F, respectivamente.

- SQErro(b) = 26,60.

O autor não menciona em seu artigo o resultado do teste para a interação entre os fatores A e B. Com base nessas informações, responda as questões a seguir, considerando α = 5%.

a) Qual o modelo estatístico associado ao experimento? Descreva cada um de seus termos. **(0,2 pts)**

O modelo estatístico constitui do delineamento em blocos casualizados no esquema de parcela subdividida.

$$Y_{ijk} = m + \alpha_i + \delta_{ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \omega_k + \varepsilon_{ijk}$$

em que

Y_{ijk} é o valor observado para a variável em estudo referente a k-ésima repetição da combinação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B;

m é a média de todas as unidades experimentais para a variável em estudo;

α_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A no valor observado Y_{ijk};

β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B no valor observado Y_{ijk};

$(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito da interação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B;

δ_{ik} é o efeito residual das parcelas, caracterizado como componente do erro (a);

ω_k é o efeito do k-ésimo bloco no valor observado Y_{ijk};

ε_{ijk} é o efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro (b).

b) Aplique o teste F para a interação entre os fatores A e B. **(0,4 pts)**

Dado: $F_{(5\%;\ 1,\ 20)} = 4{,}35$; $F_{(5\%;\ 2,\ 20)} = 3{,}49$; $F_{(5\%;\ 1,\ 12)} = 4{,}75$; $F_{(5\%;\ 2,\ 12)} = 3{,}89$.

Tabela da Análise de Variância

FV	GL	SQ	QM	F_c
Blocos	4			
A	2			
Erro(a)	8			
B	1			
A x B	2	12,2	6,10	$2{,}74^{ns}$
Erro (b)	12	26,60	2,22	
Total	29			

Quadro auxiliar (totais)

	A_1	A_2	A_3	Totais
B_1	$119^{(5)}$	70	66	$255^{(15)}$
B_2	108	58	68	234
Totais	$227^{(10)}$	128	134	$489^{(30)}$

$$SQTrat = \frac{1}{5}(119^2 + \cdots + 68^2) - \frac{(489)^2}{30} = 643{,}1$$

$$SQA = \frac{1}{10}(227^2 + 128^2 + 134^2) - \frac{(489)^2}{30} = 616{,}2$$

$$SQB = \frac{1}{15}(255^2 + 234^2) - \frac{(489)^2}{30} = 14{,}7$$

$$SQAxB = SQTrat - SQA - SQB = 12{,}2$$

O valor de F calculado para a interação foi 2,74. Como o valor Ftab = $F_{(5\%;\ 2,12)}$ = 3,89, então não se rejeita a hipótese nula (H_0), isto é, os fatores A e B atuam de forma independentemente.

c) Baseado no resultado do teste F obtido no item anterior, os procedimentos adotados para comparar os níveis de A e os níveis de B estão corretos? Justifique a sua resposta. Considere que não é necessário conferir os cálculos do autor, apenas discuta se o procedimento adotado é condizente com o resultado do teste F para a interação. **(0,4 pts)**

Como a interação não foi significativa, o autor procedeu da forma correta, pois ele comparou os níveis de um fator independente do outro fator.

10) Um estudante de pós-graduação executou um experimento, utilizando o delineamento em quadrado latino, com o objetivo de comparar a produtividade de 5 cultivares de soja (A, B, C, D e E). Ele estava precisando terminar as análises estatísticas, para apresentar um trabalho em um congresso da área e, como ele ainda não cursou a disciplina de Estatística Experimental e soube que você entende do assunto, resolveu te procurar. Ele lhe mostrou os seguintes resultados, fornecidos pelo orientador dele, que já havia iniciado as análises:

- Totais dos tratamentos, em Kg/parcela:
  $T_A = 46{,}0$; $T_B = 58{,}8$; $T_C = 57{,}3$; $T_D = 61{,}7$; $T_E = 74{,}5$;
- $CV = 14{,}85\%$;
- Não houve parcela perdida no experimento;
- Teste F da análise de variância para o efeito de tratamentos foi significativo.

Suponha que o interesse do estudante seja aplicar um tal de teste de Student-Newman-Keuls (SNK), pois seu orientador havia pedido. Somente com as informações apresentadas é possível aplicar esse teste? Se sua resposta for *SIM*, aplique o teste, considerando $\alpha = 5\%$, concluindo corretamente e recomende a(s) cultivar(es) mais produtiva(s). Caso sua resposta seja *NÃO*, justifique sua resposta e indique qual ou quais informações estão faltando para que você possa aplicar o teste de SNK.

Dado: $DMS_k = q_{(5\%;\, k;\, \text{GLErro})}\sqrt{\frac{QMErro}{r}}$;

$q_{(5\%;\, 2,\, 12)} = 3{,}08$; $q_{(5\%;\, 3,\, 12)} = 3{,}77$; $q_{(5\%;\, 4,\, 12)} = 4{,}20$; $q_{(5\%;\, 5,\, 12)} = 4{,}51$;

$q_{(5\%;\, 2,\, 20)} = 2{,}95$; $q_{(5\%;\, 3,\, 20)} = 3{,}58$; $q_{(5\%;\, 4,\, 20)} = 3{,}96$; $q_{(5\%;\, 5,\, 20)} = 4{,}23$.

** QUESTÃO ANULADA, POIS A COMISSÃO DE AVALIAÇÃO ENTENDEU QUE O NÃO FORNECIMENTO DE UMA FÓRMULA, PREJUDICOU OS CANDIDATOS NA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **

Todos os candidatos receberam 1,0 ponto pela questão